Výsledky z domácí úlohy z 6. cvičení

10.11.2011

.

H1

a) Konverguje. Cauchyho odmocninové kritérium dává ihned výsledek.
b) Konverguje. Výsledek obdržíme například pomocí limitního srovnávacího kritéria srovnáním s $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

c) Přímé dosazení do D'alembertova kritéria nám dává:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)^{2n+2}}{(n^2+2n+1)!}}{\frac{(2n)^{2n}}{(n^2)!}} = \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}} \cdot \frac{1}{(n^2+2n+1)(n^2+2n)(n^2+2n-1)\cdots(n^2+1)} =$$

$$\overset{VOAL}{=} 4 \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^{2n} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{(n^2+2n+1)(n^2+2n)(n^2+2n-1)\cdots(n^2+1)} \overset{VOAL}{=} 4 \cdot e^2 \cdot 0 = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje.

d) Využijeme toho, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|(\frac{\cos(9n)}{7+\cos(9n)})^{n/3}\right| = \left|\sqrt[3]{\frac{\cos(9n)}{7+\cos(9n)}}\right|^n \leq (\frac{1}{\sqrt[3]{6}})^n.$$

Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty}(6^{-1/3})^n$ konverguje (je to geometrická řada s koeficientem menším než jedna), konverguje díky srovnávacímu kritériu řada ze zadaní absolutně. Z absolutní konvergence plyne její konvergence.

H2 Řada konverguje pro $x \in (4, 16)$. Pro $x \in (4, 16)$ a každé $n \in \mathbb{N}$ totiž platí

$$\left|\frac{(x-10)^n}{4^n+6^n}\right| \leq \left|\frac{(x-10)^n}{6^n}\right| = q^n,$$

pro vhodné $q \in [0, 1)$. Z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ plyne (srovnávacím kritériem) absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{4^n+6^n}$ pro $x \in (4, 16)$.

Pro $x \in (-\infty, 4] \cup [16, \infty)$ řada diverguje, neboť pak $\lim_{n\to\infty} \frac{(x-10)^n}{4^n+6^n} \neq 0$.